La Secretaria de Educación Pública y Cultura del Gobierno del Estado de Sinaloa, el Centro de Ciencias de Sinaloa, la Universidad Tecnológica de Culiacán, el Ayuntamiento de Culiacán a través de la Coordinación General Municipal de Educación y el Instituto MIA, el Instituto Sinaloense de la Juventud, el Instituto de Apoyo a la Investigación e Innovación, la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas A.C., Capítulo Sinaloa

CONVOCAN

A los estudiantes de 5° y 6° grados de primaria y nivel secundaria a participar en la

8 OLIMPIADA ESTATAL DE MATEMÁTICAS

Bajo las siguientes BASES:

PARTICIPANTES.

podrán participar alumnos del sistema educativo estatal inscritos en el ciclo 2019 - 2020 que cursen su educación primaria nacidos después del 31 de agosto del año 2006 y los que cursen su educación secundaria nacidos después del 31 de agosto de 2005, en cualquiera de las modalidades educativas, oficiales o particulares.

I. CATEGORÍAS.

a) Alumnos inscritos en quinto o sexto grado de primaria.
b) Alumnos inscritos en primer grado de secundaria.
c). Alumnos inscritos en segundo grado de secundaria.
d) Alumnos inscritos en tercer grado de secundaria.

II. ETAPAS.

A) INTRAMUROS (ESCUELA) cada escuela diseñará y aplicará su examen, antes del **22 de noviembre de 2019.** Se levantará acta de los resultados en los siguientes términos en primaria, firmada por el director(a) de la escuela, en secundaria, por el coordinador académico y el director de la escuela. En la relación de los alumnos participantes, y se entregará a la supervisión escolar correspondiente para la etapa de zona escolar. Pasarán a la siguiente etapa los dos primeros lugares de cada categoría.

B) ZONA ESCOLAR: cada zona escolar aplicará su examen antes del **20 de diciembre de 2019.** Se levantará acta de resultados firmada por los representantes y directores de las escuelas participantes, anexando la relación de los alumnos participantes y se entregará al área académica de su nivel. Pasarán a la siguiente etapa los dos primeros lugares de cada categoría.

C) REGIONAL (preselectivo estatal): se aplicará un examen el **30 de Enero de 2020, a las 10:00 horas**, en las regiones y ciudades señaladas en la siguiente tabla.

REGIÓN	SEDE	MUNICIPIOS
NORTE	LOS MOCHIS	Ahome, El Fuerte, Choix.
CENTRO-NORTE	GUASAVE	Guasave, Sinaloa, Salvador Alvarado, Angostura, Mocorito.
CENTRO	CULIACÁN	Culiacán, Navolato, Cosalá, Badiraguato, Elota.
SUR	MAZATLÁN	Mazatlán, Concordia, San Ignacio, Rosario, Escuinapa.

Cada región establecerá un comité responsable de la organización, que se encargará de seleccionar la sede y la logística para la aplicación del examen.

El examen será diseñado y evaluado por el Comité de Olimpiadas de la Delegación Nacional de Profesores de Matemáticas A.C. Capítulo Sinaloa.
En esta etapa se seleccionarán a los 15 alumnos con mayor puntaje por categoría en la entidad, considerando todas las sedes, para integrar un preselectivo estatal.

D) ETAPA ESTATAL: se aplicará un examen a los alumnos del preselectivo estatal, en la ciudad de Culiacán, Sinaloa, en las instalaciones de la sede temporal del Centro de Ciencias de Sinaloa, Universidad Tecnológica de Culiacán, ubicada en Ciudad Educadora Sustentable del Saber, carretera a Imala Km. 2, a las 10:00 horas, el 28 de febrero de 2020. Para inscribir a los alumnos ganadores en esta etapa, la escuela de origen deberá presentar un expediente con la siguiente documentación.

- Copia de acta de nacimiento.
- Constancia de estudios certificada por el director de la escuela, con o sin fotografía.
- Copia de la Clave Única de Registro de Población (CURP)
- Carta de autorización de padres de familia o tutores.

Se seleccionará a los participantes que obtengan los dos más altos puntajes de cada categoría. Se levantará acta de resultados firmada por la comisión evaluadora. La premiación se realizará el día 26 de marzo de 2020 a las 11:00 horas, en el Instituto MIA. Los estudiantes ganadores de la etapa estatal representarán a Sinaloa en la XX Olimpiada Nacional de Matemáticas.

III. INFORMES.

Centro de Ciencias de Sinaloa
Prof. Silverio Camarena Garay
Tel. (667) 7599000
Email:
silveriocamarenagaray@gmail.com

IV. RECONOCIMIENTOS.

se otorgará constancia electrónica de participación a cada alumno en la etapa estatal.

V. Los casos no previstos en esta convocatoria serán resueltos por el comité académico de la olimpiada.

Culiacán Rosales, Sinaloa, México, Octubre de 2019.

Juan Alfonso Mejía López
Secretario de Educación Pública y Cultura

Luis Arturo León Tavera
Director General del Centro de Ciencias de Sinaloa

“La importancia de la narrativa en los procesos de construcción y validación de estrategias matemáticas”

A manera de análisis para concretar algunos aspectos sobre las construcciones de aprendizajes matemáticos, expondremos un análisis sencillo y breve sobre la importancia de los procesos narrativos elaborados por los alumnos donde manifiestan las estrategias de construcción de conceptos matemáticos.

Sfard, habla sobre la importancia de describir mediante discursos matemáticos en lugar de analizar objetos matemáticos. Comenta que uno de los métodos para prescindir del uso de los objetos es el cambio a otras estrategias como el dibujo y la enumeración de las piezas en la pizarra.

Al compartir de forma grupal las estrategias utilizadas por los estudiantes al resolver el problema planteado, permite que el resto del colectivo fortalezca, valide o rechace los propios,

La teoría de Sfard resuelve muchos dilemas que han molestado a la gente sobre teorías cognitivas participacionista y de grupo, tales como: ¿cómo pueden existir ideas, discursos y agrupaciones sociales más que en las mentes individuales? Proporciona información detallada análisis de cómo la gente participa en los discursos de las comunidades, al menos dentro del dominio de los discursos de matemáticas, tanto a nivel local e histórico. Se da cuenta de algunas formas básicas en las que surge el aprendizaje individual de las actividades de colaboración.

Indica cómo el significado (situado en el uso lingüístico) puede ser encapsulada en símbolos. Explica cómo los niños aprenden y que la creatividad es posible, al tiempo que sugiere maneras de crianza y estudia el aprendizaje.

Sfard nos ha hecho el gran servicio de llevar al "giro lingüístico" la filosofía del siglo XXI (especialmente Wittgenstein) en la ciencia del aprendizaje, elabora su perspectiva sobre el ejemplo de un reto de la educación matemática. Ella muestra la forma de ver los conceptos matemáticos y el aprendizaje del alumno como fenómenos discursivos en vez de objetos mentales.

Esta filosofía pone al descubierto el uso imperante de estrategias de redacción, donde se integre el dominio procedimental y de abstracción, mediante la manifestación lógica y coherente de procesos de resolución, así como el manejo de estrategias matemáticas.

Dentro de las exigencias para la interpretación de las narrativas descritas por los alumnos y colectivos, exige del docente un dominio pleno de los conceptos abordados, esto permite identificar si las estrategias planteadas son las más adecuadas.

Las connotaciones anteriores se observan en la discusión de Sfard sobre la perspectiva que debe permanecer en el investigador, define que es correcto que el análisis requiere la comprensión de los datos desde perspectivas distintas de las de los participantes, por ejemplo, al analizar las estructuras de la dinámica de interacción y las trayectorias individuales, su visión debe ser amplia y completa. Sin embargo, es importante diferenciar esta perspectiva analítica (que todavía entiende y se basa en su comprensión de la creación de significado). El analista debe entender primero el discurso con el fin de "explorar" desde el metadiscurso y ser competente para hacerlo.

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

Mathematical Discourse as Group Cognition, *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing* (Sfard, 2008).

Material de apoyo para la olimpiada de matemáticas nivel tercero de secundaria

1.- ¿Qué número debe quitarse de la lista 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11. Para que el promedio sea 6.1?

Solución: Quitar el número 5 de la lista y ¡listo!

Porque, quitando un número de la lista tenemos 10 números. Si el promedio de la lista es 6.1 la suma de los números es 61.

2.- Un triángulo rectángulo tiene hipotenusa 6 y perímetro 14,

¿Cuál es su área?

Solución:

Llamemos a y b a los catetos del triángulo y c a su hipotenusa. Sabemos que c = 6 y que a+b+c=14. Por lo tanto a+b=8. Elevando al cuadrado tenemos que $(a+b)^2=8^2$, lo cual implica que $a^2+2ab+b^2=64$. El área que buscamos es ab/2. Por el Teorema de Pitágoras $c^2+2ab=64$, sustituyendo c obtenemos que ab/2=7, que es el área que buscábamos.

3. En el antiguo Egipto tenían una aproximación al área del círculo, calculado en términos de diámetro.

Área del círculo de Egipto = $\boldsymbol{A_e = \left(d - \frac{1}{9}d\right)^2}$

¿Cuál es el error de aproximación?

Solución:

Como $d = 2r$ y $A = \pi r^2$

Entonces $A = \pi \frac{d^2}{4}$

El error de aproximación es: $\frac{A_e}{A}$

$$\frac{A_e}{A} = \frac{\left(d - \frac{1}{9}d\right)^2}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

$$\frac{A_e}{A} = \frac{d^2 - 2d\left(\frac{d}{9}\right) + \frac{d^2}{9}}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

$$\frac{A_e}{A} = 1.006$$

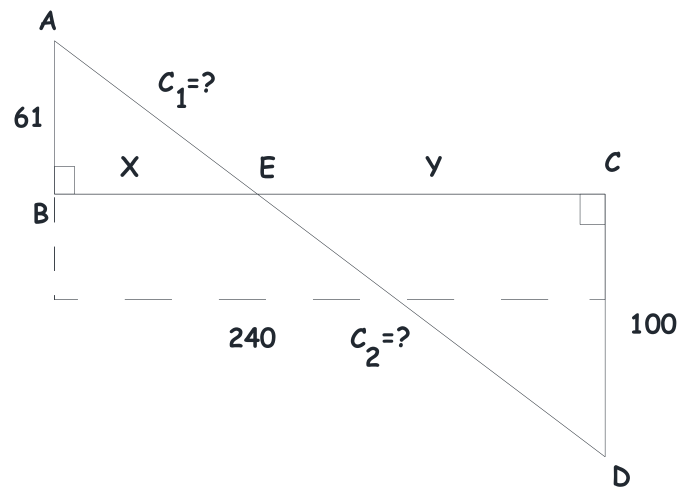
Entonces el porcentaje de error es 0.6 %

4.- ¿Cuál es la longitud del segmento $\overline{AD}$?

$\overline{AB}$ **= 61**

$\overline{BC}$ **= 240**

$\overline{CD}$ **= 100**



Solución:

De la figura tenemos

$$X + Y = 240$$

$$Y = 240 - X$$

Por el Teorema de Tales $\frac{61}{X} = \frac{100}{Y}$

Por lo tanto sustituyendo: $\frac{61}{X} = \frac{100}{240-X}$

$$100X = 61(240 - X)$$
$$100X = 14640 - 61X$$
$$100X + 61X = 14640$$

$$X = \frac{14640}{161}$$

$$X = 90.94 \approx 91$$

Entonces
$$Y = 240 - 91$$

$$Y = 149$$

Por el Teorema de Pitágoras:

$$C_2^2 = 149^2 + 100^2$$

$$C_2 = 179.446370 \approx 180$$

Nuevamente aplicamos el Teorema de Pitágoras:

$$C_1^2 = 61^2 + 91^2$$

$$C_1 = 109.5536 \approx 109$$

Por lo tanto el segmento, $\overline{\boldsymbol{AD}} = \boldsymbol{C_1} + \boldsymbol{C_2}$, esto de la figura.

$$\overline{\boldsymbol{AD}} = \mathbf{180 + 109} ,$$

$$\overline{\boldsymbol{AD}} = \mathbf{289}$$

5. Juan va corriendo de su casa a la escuela y Ana, su hermana, va caminando de la escuela a la casa. Los dos salen al mismo tiempo y van por el mismo camino. Si a las 9:00 am se cruzan en el camino, a las 9:05 am Juan llega a la escuela y a las 9:45 am Ana llega a la casa, ¿a qué hora salieron?

Solución:

Denotemos por j y a a las velocidades de Juan y Ana, respectivamente. Si llamamos x al número de minutos que Ana lleva caminando antes de encontrarse a su hermano, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$j \bullet x = a \bullet 45$$

$$j \bullet 5 = a \bullet x$$

Si despejamos con respecto a x e igualamos las ecuaciones, obtenemos que $3a = j$, es decir, Juan corre tres veces más rápido de lo que Ana camina. Sustituyendo en la primera ecuación tenemos que $x = 15$, es decir, salieron a las 8:45 am.

6. ¿Cuántos números de 6 dígitos contienen al número 2011 como parte de su representación decimal?

Solución:

Si consideramos al número 2011 como un solo símbolo. Esto es, en lugar de pensar en 6 dígitos pensemos en 3 dígitos, donde uno de ellos es el símbolo 2011.

Existen 3 formas de colocar el símbolo 2011 en los 3 espacios (dígitos).

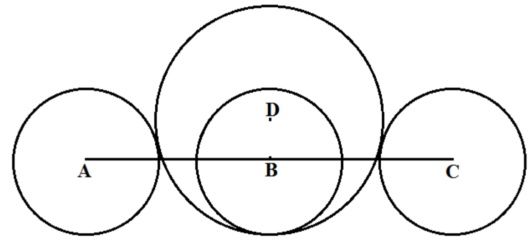
En cada espacio libre se pueden colocar los 10 dígitos (0,1,2,…,9).

Esto es, 3x10 formas distintas.

Como el primer dígito no debe ser cero, quitamos los 10 números de cada una de las dos posibilidades de que esto pase.

Total de Números = 3 x 100 – 20 = 280

7. Tomando como centros los extremos (A,C) y el punto medio (B) de un segmento de longitud 4, se construyen tres circunferencias de radio a < 1. ¿Cuál es el radio de la circunferencia tangente a las tres? Nota: D es el centro de la circunferencia tangente

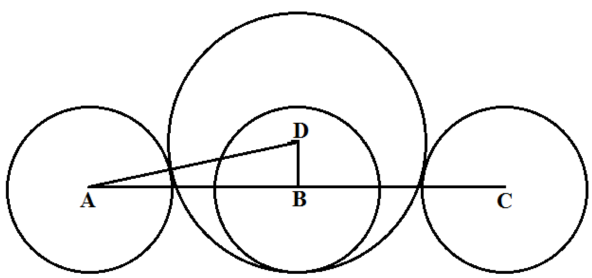


Solución:

La clave está en recordar que el punto de tangencia de las dos circunferencias es colineal con el centro de éstas.

En la siguiente figura se tiene que AC es el segmento con punto medio B y D es el centro de la circunferencia tangente a las tres que supondremos de radio r.

Entonces el triángulo ABD es rectángulo, con AB = 2, BD = $r - a$ y AD = $r + a$.



Entonces, por el teorema de Pitágoras,

$(r + a)^2 = (r - a)^2 + 4.$

Simplificando la ecuación, tenemos que $4ra = 4$

de donde r = $\frac{1}{a}$.

8. Pedro compró 38 prendas entre camisas y camisetas, gastó $2800.00. Tomando en cuenta que las camisas cuestan $100.00 y las camisetas cuestan $50.00. ¿Cuántas camisas compró pedro?

Solución:

Sean

X_1 = Cantidad de Camisas

X_2 = Cantidad de Camisetas

Entonces

$X_1 + X_2 = 38$

$100X_1 + 50X_2 = 2800$

Resolviendo el sistema tenemos que:

$X_1 = 18$, es decir, Pedro compró 18 Camisas

9. ¿Cuántos enteros positivos de cinco dígitos existen tales que el producto de sus dígitos es igual a 2000?

Solución:

Denotemos a los enteros de 5 dígitos por abcde, donde $0 \leq a,b,c,d,e \leq 9$, y $a \neq 0$.

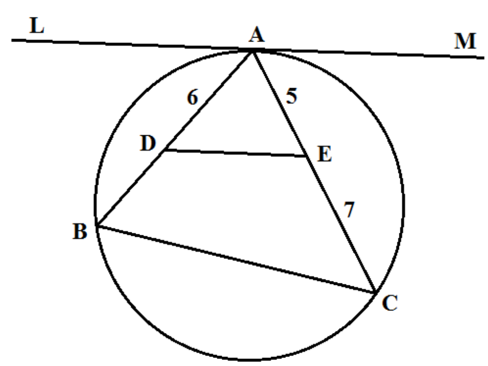
Como el producto de los dígitos es igual a 2000, entonces axbxcxdxe = $2^4 5^3$.

Luego, tres de los dígitos deben ser 5 y los otros dos dígitos tienen que tener un producto igual a 16. De donde, estos dos dígitos tienen que ser 4 y 4, o bien 2 y 8.

Ahora, hay $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$ maneras de escoger las 3 posiciones para los dígitos 5.

Para cada una de ellas, podemos completar el número de tres maneras, es decir, colocando en orden, 2 y 8, 4 y 4, o bien 8 y 2 en los otros dos lugares.

10. Consideremos el triángulo ABC y una recta tangente al círculo circunscrito al triángulo que pasa por A. Sea DE una recta paralela a la recta tangente por A. Si AD = 6, AE = 5 y EC = 7, ¿cuánto mide BD?



Solución:

Los triángulos ABC y AED son semejantes.

ya que $\angle MAE = \angle AED = \angle ABC$, la primera igualdad se debe a que los segmentos LM y DE son paralelos, y la segunda a que los ángulos ABC y MAE abren el mismo arco. Análogamente, $\angle LAB = \angle ADE = \angle ACB$. Luego, tenemos dos triángulos con tres ángulos iguales.

Por lo tanto,   entonces

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AE}$$

entonces

$$\frac{12}{6+x} = \frac{6}{5}$$

$$6(6 + x) = 5(12)$$

$$36 + 6x = 60$$

$$6x = 24$$

$$\boldsymbol{x = BD = 4}$$

11. Un autobús sale de la ciudad A hacia la ciudad B a una velocidad de 52 km/h. Simultáneamente, otro autobús sale de B hacia A con una velocidad de 104 km/h. La distancia entre A y B es de 222 km. Calcula la distancia que recorre cada uno de los autobuses hasta que se cruzan.

Solución:

Modelo

Sea T el tiempo en el que se cruzan.

Sea d1 la distancia que recorre el autobús hasta que se cruzan.

Sea d2 la distancia que recorre el coche hasta que se cruzan.

Se tiene que:

d1 + d2 = 222

Además:

d1 = 52T

d2 = 104T

entonces:

52T + 104T = 222

156T = 222

T = 222/156

d1 = 52(222/156)

d2 = 104(222/156)

$d1 = 74$ km

$d2 = 148$km

12. Un grupo de 20 cerdos se come, en 20 días 4000 Kg de alimento. ¿Cuántos días durarán 4500 Kg de alimento a un grupo de 90 cerdos?

Solución 1:

Modelo

X cantidad de alimento (en Kg) se come un cerdo en un día.

D días que tardan 90 cerdos en comerse 4500 kg de alimento

Entonces: 20X es la cantidad de alimento que se comen 20 cerdos en un día.

20(20X) es la cantidad de alimento que se comen 20 cerdos en 20 días.

$20(20X) = 4000$

$X = 10$

$D(90(10)) = 4500$

$D = 5$

Solución 2:

Modelo proporcional

$20(20)/4000 = X(90)/4500$

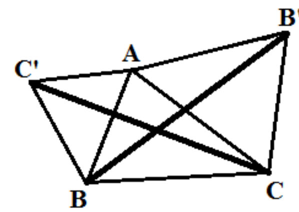
$400/4000 = 90X/4500$

$X = 4500(400)/90(4000)$

$X = 1800000/360000$

$X = 5$

13. Si sobre los lados AB y CA de un triángulo ABC se construyen triángulos equiláteros ABC’ y CAB’, como es mostrado en la figura, muestre que la longitud de BB’ es igual a la longitud de CC’.

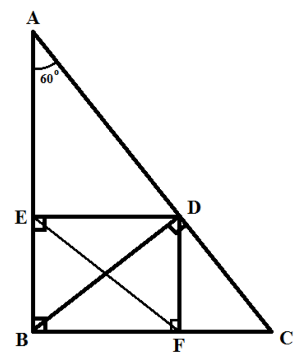


Solución:

Notemos que en los triángulos BAB’ y C’AC se tiene que BA = C’A, AB’ = AC y <BAB’ = <BAC + 60o = <C’AC, luego por el criterio LAL, los triángulos son congruentes.

por lo que BB’ = CC’.

14. En el dibujo BD, DF y DE son alturas de ABC, BCD y BDA, respectivamente. El triángulo ABC es rectángulo y el ángulo BAC mide 60^o. Si AC = 8, ¿cuánto mide EF?



Solución:

Como EBFD es un rectángulo, tenemos que sus diagonales son iguales, es decir, EF = BD.

Sabemos también que

1/2 = cos 60^o = AB/AC = AB/8

entonces: AB = 4

Ahora bien, como el triángulo ABC es semejante al triángulo ADB, tenemos que <ABD = 30^o, luego

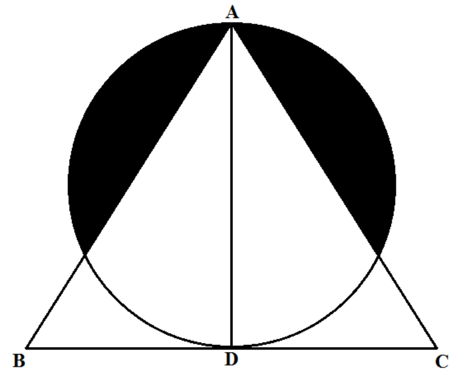
1/2 = sen 30^o = AD/AB = AD/4 , es decir, AD = 2.

Por lo que tenemos

EF = BD = $\sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

<u>**EF**</u> $= \mathbf{2\sqrt{3}}$

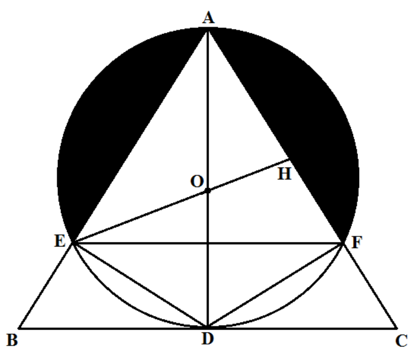
15. Encuentra el área de la región sombreada, si el triángulo ABC es equilátero, de lado 4, y AD es diámetro del círculo.



Solución:

Por el Teorema de Pitágoras $AD^2 = AC^2 - DC^2 = 4^2 - 2^2 = 12$, entonces $AD = 2\sqrt{3}$.

Sea O el centro del círculo, y E y F la intersección de los lados AB y AC con el círculo, respectivamente. Entonces, $<AED = <DFA = 90^o$.



Como $AD = 2\sqrt{3}$, entonces $OA = OD = OE = OF = \sqrt{3}$.

Además $<AOE = <EOF = <FOA = 120^o$, ya que $<EOF = 2<EAF$.

Denotemos por (AEO) el área del triángulo AEO. Si prolongamos EO, corta a AC en H y forma un ángulo recto, es decir, AH es una altura del triángulo AEO. Entonces,

$(AOF) = (AEO) = \frac{\sqrt{3}\,AH}{2} = \frac{\sqrt{3}\,\sqrt{3}\,sen\,60}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

El área del sector angular EOF es 1/3 del área del círculo, es decir, $1/3\,[\pi\,(\sqrt{3}\,)^2] = \pi$.

Por lo tanto el área de la región sombreada es igual a:

$[\pi\,(\sqrt{3}\,)^2 - \pi - 2(\frac{3\sqrt{3}}{4})] = \mathbf{2\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}}$

16. **En el arreglo triangular, un renglón se denota con el número a la izquierda y una columna por el número que está más arriba. Por ejemplo, el 12 está en el renglón 10, columna 2. ¿En qué renglón y en qué columna está el número 2015?**

			1			
		2	**3**	**4**		
	5	**6**	**7**	**8**	**9**	
10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
			:			

Solución:

Si contamos los renglones con números sucesivos, es decir, 1,2,3,…, observamos que el último número del segundo renglón es 2^2, el último número del tercer renglón es 3^2, etc.

Como el segundo renglón tiene 3 números, el tercero 5 y el cuarto 7 números, entonces el renglón n+1 tiene 2(n+1)-1 = 2n+1 números y termina con el número $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

Como 44^2=1936 y 45^2 = 2025, tenemos que 2015 está en el renglón que empieza con 44^2+1 = 1937.

Veamos ahora en qué columna se encuentra. Tenemos que $\frac{2025+1936}{2} = 1981$, es decir, el número que está en el centro del arreglo triangular en el renglón que inicia con 1937 es el 1981, que se encuentra exactamente en la columna 1 como se muestra en el siguiente arreglo:

	1^2			
2	3	2^2		
	:	:		
	:	:	n^2	
	:	:	:	
	1981	1982 …	2015 …	2025

Como 2015 – 1980 = 35, tenemos que 2015 está en la columna 35^2 = 1225.

17. **De cuántas maneras se puede pintar un cubo si cada cara debe pintarse de negro o de blanco? (Se considera que dos cubos están pintados de la misma forma cuando girando uno de ellos se puede lograr que se vea idéntico al otro).**

Solución:

Primero, dividamos nuestro problema en casos dependiendo de cuántas caras del cubo se colorean de blanco:

i) Ninguna cara se pinta de blanco: sólo hay una forma de hacer esto.

ii) Se pinta una cara de blanco: nuevamente, sólo hay una forma de hacerlo ya que sin importar cual cara pintemos basta girar el cubo para obtener cualquier otra coloración.

iii) Se pintan dos caras de blanco: en este caso hay dos formas distintas de pintar, que las caras blancas compartan una arista o que no compartan.

iv) Se pintan tres caras de blanco: partamos de las dos formas distintas obtenidas en el caso anterior. En la primera forma (las dos caras blancas comparten una arista) tenemos dos formas distintas de pintar una nueva cara: que la nueva comparta arista con ambas caras ya pintadas o que comparta con sólo una de ellas. Mientras que en la segunda forma (las dos caras blancas no comparten arista) sólo tenemos una forma de pintar una nueva cara: que la nueva comparta una arista con cada una de las ya pintadas. Sin embargo, esta coloración resulta equivalente a la segunda forma en el caso anterior. Por lo tanto, sólo hay dos formas distintas de pintar tres caras de blanco.

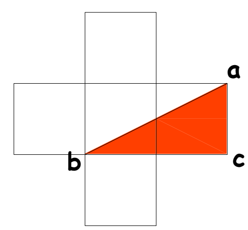
v) Se pintan cuatro caras de blanco: si se pintan cuatro de blanco debemos pintar dos de negro por lo que este caso debe ser análogo al caso iii) con el negro jugando el papel del blanco y viceversa. Por lo tanto, debe haber dos formas distintas.

vi) Se pintan cinco caras de blanco: nuevamente, este caso es análogo al ii), entonces, hay sólo una forma.

vii) Se pintan seis caras de blanco: sólo hay una forma de hacer esto.

Por lo tanto, el total de formas de pintar el cubo es: 1+1+2+2+2+1+1 = 10.

18. Si la longitud del segmento *ab* es de 6 cm y los cinco cuadritos de la cruz son iguales, ¿cuánto vale el área de la cruz?



Solución:

Llamemos ***l*** al lado de cada cuadrito y C al vértice que indica la siguiente figura:

Entonces por el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC tenemos que

$$(2l)^2 + l^2 = \overline{AB}^2$$

Por tanto,

$$4l^2 + l \ \ = 6^2$$

Entonces

$$5l^2 = 36$$

Por otro lado el área de cada cuadrito es: l^2

Y como la cruz está formada por 5 cuadritos, su área total es de: $5l^2$

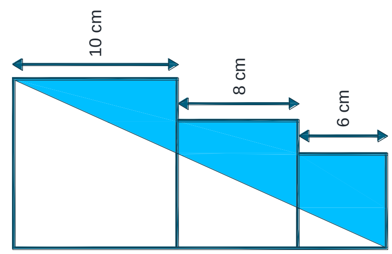
En consecuencia su área es de $36cm^2$.

19. Hay 100 focos. Cada hora Susy cambia de situación da algunos de los focos, es decir, apaga algunos de los que están prendidos y prende algunos de los que están apagados. Lo hace de acuerdo a la siguiente regla: La primera hora cambia de situación el foco 1; la segunda hora cambia de situación los focos 1 y 2, la tercera hora cambia de situación los focos 1, 2 y 3 y así sucesivamente. Si al principio todos los focos están apagados, ¿cuántos focos habrá prendidos después de 51 horas?

Solución:

La pregunta es cuántos números impares menores e iguales a 51 hay, que son los que están encendidos.

20. Tres cuadrados con lados de longitudes: 10 cm, 8 cm y 6 cm, respectivamente, se colocan uno al lado del otro como se muestra en la siguiente figura.
¿Cuál es el área de la parte sombreada?



Solución:

Área Buscada = Área total – Área del triángulo rectángulo de base 10+8+6=24 y altura 10
X = (10^2 + 8^2 + $6^{2)}$ – (24*10/2) = 100 + 64 + 36 – 120 = 200 – 120 = 80

21. Al comenzar el año escolar un alumno compra 6 libros y 7 cuadernos por $199.00 Para completar su equipo de trabajo le faltan 2 libros y 3 cuadernos que compra posteriormente por $71.00 ¿Cuánto le cuesta cada libro y cada cuaderno suponiendo que todos los libros tienen el mismo precio y todos los cuadernos también?

Solución:

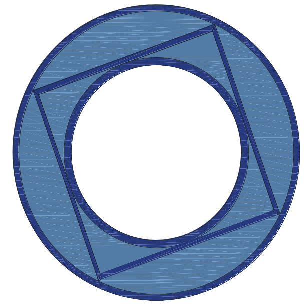
Área Buscada = Área total – Área del triángulo rectángulo de base 10+8+6=24 y altura 10
X = (10^2 + 8^2 + $6^{2)}$ – (24*10/2) = 100 + 64 + 36 – 120 = 200 – 120 = 80

22. Hallar tres números enteros positivos consecutivos, tales que la suma de los cuadrados de los dos menores sea igual al cuadrado del mayor, más doce unidades.

Solución:

Se debe cumplir que: $x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2 + 12$
$\Rightarrow x^2 + (x^2 + 2x + 1) = (x^2 + 4x + 4) + 12$
$\Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$
X = 5 o X = -3 por cualquier método (factorización o fórmula general)
$\Rightarrow$ X = 5

23. El cuadrado de la figura mide 4 cm de lado. ¿Cuánto mide el área de la corona (área sombreada)? (considera $\boldsymbol{\pi = 3.14}$)



Solución:

Se puede deducir que el diámetro del círculo más pequeño (d) es igual al lado del cuadrado.

d = 4

⇒ Radio del Círculo Pequeño (r) = 2

Se puede deducir que el diámetro del círculo más grande (D) es igual a la diagonal del cuadrado.

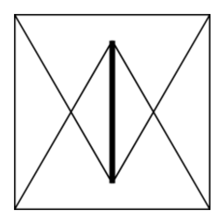
Por teorema de Pitágoras se tiene que:

$D = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{(2)4^2} = \left(\sqrt{2}\,\right)(4)$ $\quad o \quad$ $D = \sqrt{32} \approx 5.6568$

⇒ Radio del Círculo Grande (R) = $\left(\sqrt{2}\,\right)(2)$ $\quad o \quad$ $R \approx 2.8284$

El área de la corona es: $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) \cong 12.56$

24. La figura muestra un cuadrado y dos triángulos equiláteros en su interior. Si el lado del cuadrado mide 1, ¿cuál es la longitud del segmento resaltado?



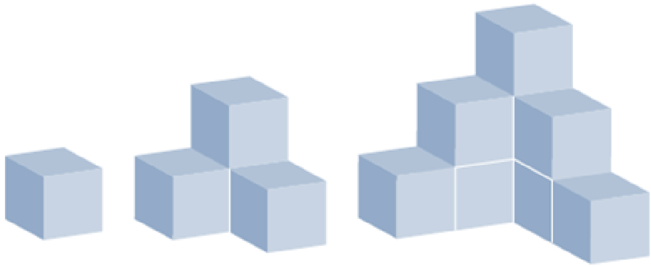
Solución:

Altura del triángulo equilátero: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Distancia que le falta para llegar al lado opuesto a la base es 1 - $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Longitud del segmento = 1 – 2(1 - $\frac{\sqrt{3}}{2}$) = 1 – 2 + $\sqrt{3}$ = $\sqrt{3}$ – 1 ≈ 0.732

25. Reflexiona en la siguiente disposición de cubos.



Enuncia la expresión algebraica que establece el número de cubos que forman la figura que ocupa la enésima posición de la sucesión.

Solución:

Se puede deducir de diferentes puntos de vista

Solución 1:

Simple conteo

1 – 1

2 – 4

3 – 9

Se tiene la idea de que la relación es el cuadrado y se verifica con los siguientes

4 – 16

:

Solución 2:

Se puede ver como dos paredes iguales con un muro central

La tercera disposición de cubos:

Cubos en el muro central = 3

Cubos en cada pared = 2 + 1

Total = 3 + 2(2+1) = 9

Se deduce que en la siguiente disposición (4) se tiene que:

Cubos en el muro central = 4

Cubos en cada pared = 3 + 2 + 1

Total = 4 + 2(3+2+1) = 16

Se deduce que en la disposición (n) se tiene que:

Cubos en el muro central = n

Cubos en cada pared = (n-1) + (n-2) + … + 2 + 1

Total $= n + 2\left(\frac{(n-1)n}{2}\right) = n + n^2 - n = n^2$

Solución 3:

Se puede ver como dos paredes, una que contiene el muro central y la otra no.

La tercera disposición de cubos:

Cubos en la pared con el muro central = 3 + 2 +1

Cubos en la otra pared = 2 + 1

Total = (3+2+1) + (2+1) = 9

Se deduce que en la siguiente disposición (4) se tiene que:

Cubos en la pared con (el muro central) = 4 + 3 + 2 + 1

Cubos en cada pared = 3 + 2 + 1

Total = (4+3+2+1) + (3+2+1) = 16

Se deduce que en la disposición (n) se tiene que:

Cubos en el muro central = n + (n-1) + (n-2) + … + 2 + 1

Cubos en cada pared = (n-1) + (n-2) + … + 2 + 1

Total $= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + \left(\frac{(n-1)n}{2}\right) = \left(\frac{n(n+1)+(n-1)n}{2}\right) = \left(\frac{n[(n+1)+(n-1)]}{2}\right) = n^2$

Solución = n^2

26. Un hombre compró doce piezas de fruta (manzanas y naranjas) por 99 pesos. Si una manzana cuesta 3 pesos más que una naranja (el precio por manzana es exacto en pesos, es decir, sin centavos), y compró más manzanas que naranjas, ¿cuántas de cada una compró?

Solución

Formalización algebraica

Sea x = número de manzanas; y = número de naranjas;

w = precio por manzana; z = precio por naranja.

Se tiene que:

$x + y = 12$

$(w)(x) + (z)(y) = 99$

$w = z+3$

$x > y$

Tratamiento

$\Rightarrow (z+3)(x) + (z)(y) = 99$

$\Rightarrow (z)(x+y) + 3x = 99$

$\Rightarrow 12z + 3x = 99$

$\Rightarrow 4z + x = 33$

$\Rightarrow x = 33 – 4z$

Como $y = 12 – x \Rightarrow y = 12 – (33 - 4z) \Rightarrow y = 4z – 21$

Como $x > y \Rightarrow 33 – 4z > 4z – 21 \Rightarrow 54 > 8z \Rightarrow z < 7$

$\Rightarrow z \leq 6$

Como el número de manzanas y de naranjas es positivo $\Rightarrow 4z-21 > 0 \Rightarrow z > 21/4$

$\Rightarrow z \geq 6$

Juntando las dos desigualdades concluimos que $z = 6$

$\Rightarrow w = 9$

$\Rightarrow x = 33 – 4(6) = 33 – 24 = 9$

$\Rightarrow y = 4(6) – 21 = 24 - 21 = 3$

Solución:

Compró: 9 manzanas y 3 naranjas (precios: \$9 por manzana; \$6 por naranja)

Nota: el tratamiento puede ser en forma analítica (el desarrollado en la solución propuesta) o en forma explorativa, es decir, prueba y error.

27. Cuatro músicos tocan en una banda. En todas sus canciones hay un trompetista, un bajista, un baterista y un guitarrista. Deciden hacer una tocada que consistirá de 8 canciones. Para no aburrirse, deciden que se irán cambiando los instrumentos de manera que ninguno toque el mismo instrumento en dos canciones consecutivas.
¿De cuántas maneras puede realizarse la tocada?

Solución:

Primero debemos ver de cuantas maneras pueden los músicos hacer la transición de una canción a la siguiente cumpliendo la condición deseada. Al terminar una canción el primer músico (no importa quién sea) tiene tres opciones para su siguiente instrumento (cualquiera menos el que acaba de tocar). Después de que este elige instrumento, el siguiente músico (el que acaba de tocar el instrumento que eligió el anterior) tiene también tres opciones y, cuando este realiza su elección el resto de la transición ya queda determinada: si decide intercambiar instrumentos con el primero entonces los otros dos también deben intercambiar entre ellos y, si decide tomar el instrumento de uno de los otros dos, éste no puede elegir entonces el instrumento del primero pues en ese caso el cuarto músico se quedaría sin cambiar instrumento. Por lo tanto, tenemos $3 \times 3 = 9$ formas de realizar la transición.

Ahora, para hacer la tocada veamos de cuántas formas pueden acomodarse los músicos para la primera canción: el primer músico puede escoger cualquiera de los cuatro instrumentos, al segundo le quedarían tres opciones, y así sucesivamente, por lo que vamos a tener $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ formas de tocar la primera canción.

Una vez decidido cómo acomodarse en la primera canción los músicos realizarán 7 transiciones que, sabemos, se pueden hacer de 9 formas cada una. Por lo tanto, el total de formas para realizar la tocada sería 24×9^7 .

28. Considere la lista 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, . . . Tomando en cuenta que en la posición 1 se encuentra el número 1, en la posición 2 se encuentra el número 2, en la posición 3 se encuentre el número 2, en la posición 4 se encuentra el número 3, etc. ¿Cuál es el número escrito en la posición 2016?

Solución:

Sabemos que el último tres se escribe en la posición 1+2+3
Ó bien
Sabemos que el primer tres se escribe en la posición (1+2) + 1
Ó bien
Sabemos que el último cuatro se escribe en la posición 1+2+3+4
Ó bien
Sabemos que el primer cuatro se escribe en la posición (1+2+3) + 1
Ó bien
Sabemos que el último 20 se escribe en la posición 1+2+3+…+20
Ó bien

Sabemos que el primer 20 se escribe en la posición (1+2+3+…+19) + 1
Ó bien
Sabemos que la suma de los primeros n números es : $\frac{n(n+1)}{2}$

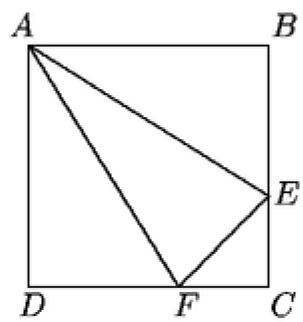
Entonces buscamos el número entero más pequeño que cumple que :
$$\frac{n(n+1)}{2} \geq 2016$$
Lo que nos lleva a la Ecuación : $n^2 + n - 4032 = 0$
$\Rightarrow$ n = 63

o

Entonces buscamos el número entero más pequeño que cumple que:
$$\frac{n(n-1)}{2} + 1 \leq 2016$$
Lo que nos lleva a la Ecuación : $n^2 - n - 4030 = 0$
$\Rightarrow$ n = 63

29. En un cuadrado ABCD de lado 1 está inscrito un triángulo AEF de tal forma que E está sobre BC y F está sobre CD. Las longitudes de los lados AE y AF son iguales y son el doble de la longitud del lado EF. Calcular la longitud de EF.

Solución:



Sabemos que:

AB=BC=CD=AD=1;

AE=AF=2EF

Usando el TP en ABE tenemos que $AE^2 = AB^2 + BE^2$

Usando el TP en ADF tenemos que $AF^2 = AD^2 + DF^2$

Como AE = AF y AB = AD = 1 tenemos que: $1 + BE^2 = 1 + DF^2 \Rightarrow BE = DF$

Concluir que BE = DF

Como BE + EC = 1 = DF + FC

Concluir que EC = FC

Plantear las ecuaciones de los 2 triángulos rectángulos diferentes (ECF y ABE o ADF) con base en el Teorema de Pitágoras

$EF^2 = EC^2 + FC^2$

$AE^2 = AB^2 + BE^2$ ó $AF^2 = AD^2 + DF^2$

Reducir a un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas

$EF^2 = 2EC^2$

$(2EF)^2 = 1 + (1-EC)^2$

a) $(7/2)EF^2 + \sqrt{2}\,EF - 2 = 0$

$EF = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{30}}{7}$

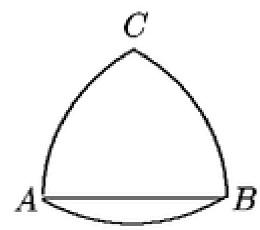
$7EC^2 + 2EC - 2 = 0$

$EC = \frac{-1+\sqrt{15}}{7}$

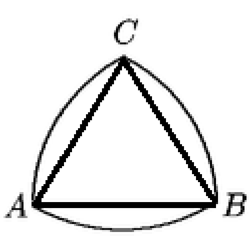
Como $EF^2 = 2EC^2$

$EF = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{30}}{7}$

30. En la figura, AB es el arco de un círculo centrado en C, BC es el arco de un círculo centrado en A, AC es el arco de un círculo centrado en B. Si la recta AB mide 1, ¿Cuál es el área de la figura delimitada por los tres arcos?



Solución:



Los tres arcos fueron trazados con el mismo radio, luego el triángulo **ABC** es equilátero de lado 1.

Como en el triángulo equilátero todos los ángulos son iguales a 60^o entonces tenemos que el área del sector **CB** es una sexta parte del área del círculo, es decir, $\frac{\pi r^2}{6} = \frac{\pi}{6}$.

Análogamente las áreas de los sectores **AB** y **AC** son $\frac{\pi}{6}$, respectivamente.

La altura del triángulo **ABC** es $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces su área es $\frac{bh}{2} = \frac{1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

a) El área de la figura es la suma del área de los tres sectores menos dos veces el área del triángulo **ABC**.

Por lo tanto, el área de la figura es: **A** = $3\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$.

b) El área del sector menos el área del triángulo representa el área de uno de los tres subsectores que junto con el área del triángulo dan la solución.

$$Área\ de\ un\ subsector = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12}$$

$$Área\ de\ la\ figura = A = 3\left(\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{12}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi-3\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi-2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$$

31. Si $x^2 + y^2 = 6xy$, con $x \neq y$, ¿a qué es igual $\frac{x+y}{x-y}$?

Solución:

Tenemos que $\mathbf{(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 = 8xy}$, así que, despejando, $x + y = \sqrt{8xy}$ De la misma manera, de $\mathbf{(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2 = 4xy}$ obtenemos $x - y = \sqrt{4xy}$.

Entonces $\frac{x+y}{x-y} = \frac{\sqrt{8xy}}{\sqrt{4xy}} = \sqrt{\frac{8xy}{4xy}} = \sqrt{2}$.

32. Calcula el valor de la siguiente operación: $\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right)\cdots\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2017}}\right)$

Solución 1:

Considerar que

$1 + \frac{1}{k} = \frac{k}{k} + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$

Expresar el producto

$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{2017}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{4}\right)\cdots\left(\frac{2018}{2017}\right)$

Determinar el resultado

$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2017}\right)=\frac{2018}{2}=1009$

Solución 2:

En forma exhaustiva

$1+\frac{1}{2}=1.5$ ó $\frac{3}{2}$

$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{6}\right)=\frac{12}{6}=\frac{4}{2}=2$

$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)=2\left(1+\frac{1}{4}\right)=2.5\ o\ \frac{5}{2}$

$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)=\frac{5}{2}\left(1+\frac{1}{5}\right)=\frac{5}{2}+\frac{5}{10}=\frac{6}{2}=3$

:

:

Deducir el patrón

$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{k+1}{2}$

Calcular el resultado

$\Rightarrow\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2017}\right)=\frac{2018}{2}=1009$

33. Omar le da a cada uno de sus libros una clave de tres letras utilizando el orden alfabético: AAA, AAB, AAC, …, AAZ, ABA, ABB, etc. Considerando el alfabeto de 26 (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z) letras y que Omar tiene 2017 libros, ¿cuál fue el último código que Omar utilizó en su colección?

Solución 1:

Forma exhaustiva

De la **A** a la **Z**, en orden, hay 26 letras, así que de **AAA** a **AAZ** hay 26 códigos (**AAZ** es el número 26)

Identificar los primeros 26 códigos (ciclos asociados a la segunda letra)

De la misma manera, de **AAA** a **AZZ** hay 26 x 26 = 676 códigos.

Identificar los primeros 676 códigos (ciclos asociados a la tercera letra)

De la misma manera, de **BAA** a **BZZ** hay 26 x 26 = 676 códigos.

$\Rightarrow$ **AAA** a **BZZ** hay = 676+676 = 1352 códigos (falta)

$\Rightarrow$ **AAA** a **CZZ** hay = 676+676+676 = 2028 códigos (sobra)

Ubicar la primera letra del código (**C**)

a) Podemos ver que 2017 = 676 x 2 + 665

Identificar el número de códigos faltantes

Así que aún nos faltan 665 códigos después de **BZZ**, que es el código 2 x 26 x 26 = 1352.

Como 665 = 25 x 26 + 15, después de **CYZ** (que es el código 1352 + 25 x 26)

Identificar la segunda letra del código (**Z**)

Nos faltan aún 15 códigos, así que la etiqueta es **CZO**.

Identificar la última letra

b) Podemos ver que 2017 = 2028 - 11

Encontrar el onceavo código antes de **CZZ**

Solución. CZO

Solución 2:

Identificar que se busca un número con base 26

$2017 = x26^2 + y26^1 + z26^0 = x26^2 + y26 + z$

Tenemos que $2017 = 2(26^2) + 25(26) + 15$

Importante

Posición de la primera letra del código = 3 (no 2)

Posición de la segunda letra del código = 26 (no 25)

Posición de la tercera letra del código = 15 (no 16)

Plantear la solución

CZO

34. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger un número de tres cifras al azar las tres cifras sean diferentes?

Solución:

Hay $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ números de tres cifras

Hay $9 \cdot 9 \cdot 8$ números de tres cifras diferentes

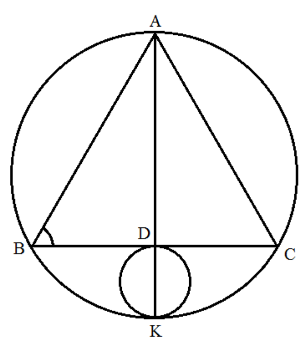
La respuesta es:

$$\frac{9 \cdot 9 \cdot 8}{9 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{72}{100} = \frac{18}{25}$$

35. Un triángulo isósceles con base BC está inscrito en una circunferencia C_1 de radio 1. Sean α el ángulo ABC y C_2 una circunferencia tangente externamente a la base BC del triángulo en su punto medio y tangente internamente a C_1. Encuentre el radio de C_2 en términos de α.

Solución

La mediatriz del lado BC es altura y bisectriz del ángulo en A, luego ésta pasa por el centro de la circunferencia C_1 y por el punto de tangencia de las circunferencias K. Llamamos a=BC, como D es punto medio sabemos que $(a/2)$=BD=DC

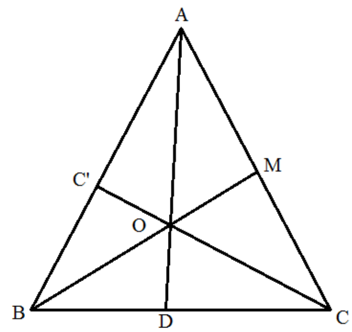


Si $\alpha = \angle ABC$ tenemos que $\angle BCK = \angle BAK = 90^\circ - \alpha$, luego DK = DC tg$\angle$BCK = $(a/2)\text{tg}(90^\circ - \alpha)$. De donde, el radio de C_2 es $(a/4)\ \text{tg}(90^\circ - \alpha)$.

36. En el triángulo ABC, la altura AD, la bisectriz BM y la mediana CC' son concurrentes en un punto O. Muestre que si AO = BO entonces ABC es equilátero.

Solución:

Si AO = BO, entonces el triángulo ABO es isósceles con ángulos iguales en los vértices A y B, por lo que la mediana OC’ de ABO, es también altura. Por lo tanto, CC’ es altura del triángulo ABC, luego este triángulo es isósceles con BC = CA.



Ahora por ser concurrentes AD, BM, y CC’, y teniendo en cuenta que AD y CC’ son alturas, tenemos entonces que BM es también altura, y como es también bisectriz resulta que ABC es isósceles con AB = BC. Por lo tanto, ABC es equilátero.

37. En cierto planeta hay tantos días en una semana como semanas en un mes como meses en un año. Si un año tiene 1331 días, ¿cuántos días tiene cada semana?

Solución:

N días es una semana

N semanas es un mes $\Rightarrow$ N^2 días es un mes

N meses es un año $\Rightarrow$ N^3 días es un año

$\Rightarrow N^3 = 1331$

$\Rightarrow N = 11$

38. ¿Cuál es el menor entero positivo por el cual hay que dividir al número 108,675 para que el cociente sea un cuadrado perfecto?

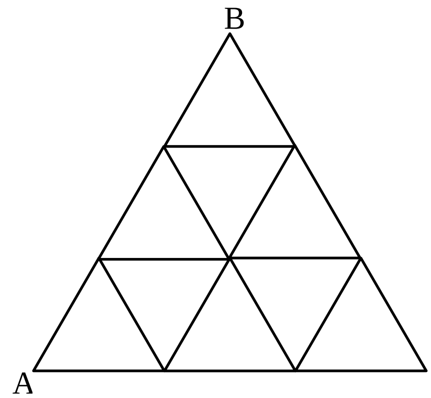
Solución:

Se tiene que: $108675 = 3^3 x 5^2 x 7 x 23$

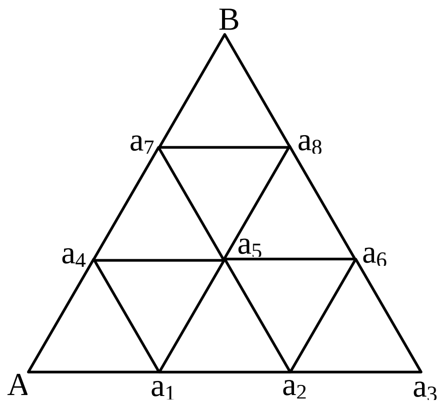
El cuadrado perfecto más grande, en la descomposición en primos, es $3^2 x 5^2$.

$\Rightarrow$ se debe dividir entre 3x7x23 = 483

39. ¿Cuántos caminos hay de A a B siguiendo las líneas de la figura, si no se permite caminar horizontalmente hacia la izquierda, ni bajar?



Solución:



Para a_1, a_2 y a_3 solo existe un camino.

Para a_4 hay dos caminos

Para a_5 hay 2 caminos (viniendo de a_4) + 1 camino (viniendo de a_1) + 1 camino (viniendo de a_2)=4

Para a_6 hay 6 caminos

Para a_7 hay 6 caminos

Para a_8 hay 16 caminos

Para B hay 22 caminos

40. ¿Cuántos números de tres dígitos tienen el primer dígito impar, el segundo par y el tercero igual a la suma de los dos primeros?

Solución:

Luego de elegidos los dos primeros dígitos, el número de posibilidades para el tercero no es fijo sino que depende de las dos primeras elecciones. En efecto, si los dos primeros dígitos son, por ejemplo, 3 y 4, entonces para el tercero hay una única posibilidad, a saber 3 + 4 = 7. Pero si los dos primeros dígitos son 5 y 8, para el tercero no hay ninguna posibilidad (pues 5 + 8 = 13 no es un dígito). Una forma de resolver el problema consiste en observar que el tercer dígito sólo puede ser 1, 3, 5, 7 ó 9. Si es 1, los dos primeros sólo pueden ser 1 y 0. Si es 3, los dos primeros pueden ser 3 y 0 ó 1 y 2. Si es 5, los dos primeros pueden ser 5 y 0, 3 y 2 ó 5 y 4. Si es 7, los dos primeros pueden ser 7 y 0, 5 y 2, 3 y 4 ó 1 y 6. Si es 9, los dos primeros pueden ser 9 y 0, 7 y 2, 5 y 4, 3 y 6 ó 1 y 8. Por el principio de la suma, la respuesta es 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.

Este problema puede resolverse también construyendo la siguiente tabla de sumas de un primer dígito impar y un segundo dígito par (en la cual sólo hemos indicado las sumas menores que 10):

	0	2	4	6	8
1	1	3	5	7	9
3	3	5	7	9	
4	5	7	9		
7	7	9			
9	9				

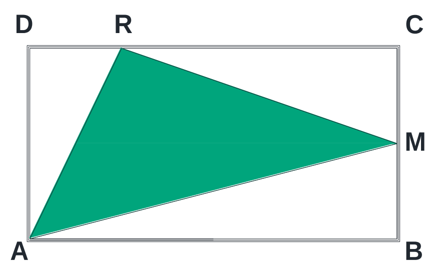
Es obvio que la respuesta es 15.

41. El cuadrado ABCD tiene $32cm^2$ de área. M es punto medio de BC.

AB = 2AD

DR = BM

¿Cuál es el área del triángulo ARM?

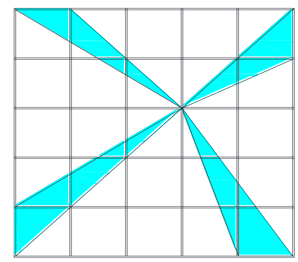


Solución:

Sea x la longitud de BM.
Por ser M punto medio de CB tenemos que: CM=BM=x y 2x=CB.
Como ABCD es un rectángulo, AD=CB=2x y sabemos que DR=BM=x.
Como AB = 2AD, entonces AB = 4x.
El área del rectángulo es igual a (AB)(AD) = (4x)(2x) = $8x^2$ = 32
Esto implica que: x = 2
Esto implica que:
AD = BC = 4
AB = DC = 8
DR = BM = CM = 2
RC = 6
área del triángulo ADR = 4
área del triángulo RCM = 6
área del triángulo AMB = 8
Esto implica que el área no sombreada = 18
Esto implica que el área sombreada, del triángulo ARM = 32-18

Área del triángulo ARM = 14

42. En el diagrama dibujado sobre la cuadrícula, ¿Cuál es la razón entre el área no sombreada y el área sombreada?



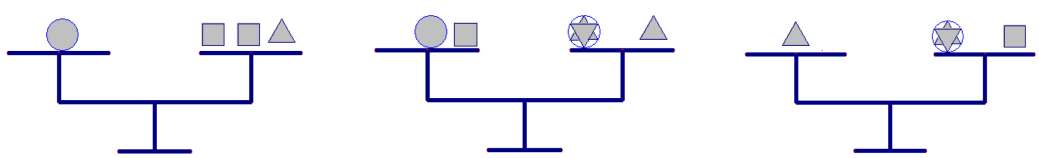
Solución:

Establezcamos como unidad a la longitud de los lados de un cuadrado.
Esto implica que el área de la cuadrícula completa es de 25.
Establecer el área de los triángulos sombreados utilizando la fórmula de base por altura sobre 2, donde la base la tomamos como el lado sobre el perímetro del cuadrado general, el cual es de una unidad, y la altura como la longitud de la perpendicular a la base que pasa por el vértice opuesto a la base.

El área del triángulo superior izquierdo es: (1)(2)/2 = 1
El área del triángulo superior derecho es: (1)(2)/2 = 1
El área del triángulo inferior izquierdo es: (1)(3)/2 = 1.5
El área del triángulo inferior derecho es: (1)(3)/2 = 1.5

Esto implica que el área sombreada es: 5
Esto implica que el área no sombreada es: 25-5 = 20
Esto implica que la razón entre ambas áreas es de 1 a 4

43. Observa la siguiente figura y encuentra cuántos cuadrados pesan lo mismo que un círculo.



Solución:
Sea x = peso del círculo;
y = peso del cuadrado;
z = peso del triángulo;
w= peso de la estrella inscrita.

Esto implica que:
Ecuación 1 - $x = 2y + z$
Ecuación 2 - $x + y = w + z$
Ecuación 3 - $z = w + y$

restando la ecuación 3 a la ecuación dos tenemos que:
$x + y – z = z – y$
Esto implica que:
$2z = x + 2y$
$z = (1/2)x + y$

Sustituyendo en la Ecuación 1 tenemos que:
$x = 2y + (1/2)x + y$
Esto implica que:
$x = 6y$

Es decir
Un círculo pesa lo mismo que 6 cuadrados

44. Halla el valor de x si se cumple: $27^2+9^3+3^6=3^x$

Solución:

Expresar 27 como 3^3;
Expresar 9 como 3^2;
Sustituyendo tenemos que:
$27^2 + 9^3 + 3^6 = (3^3)^2 + (3^2)^3 + 3^6 = 3^6 + 3^6 + 3^6 = 3(3^6) = 3^7 = 3^x$
Esto implica $x = 7$

45. La mamá de Alan guarda todas las velas de los pasteles de cumpleaños de Sofía (sin reutilizarlas). Si tiene 120 velas, ¿cuántos años tiene Sofía?

Solución:

El primer año utilizó 1 vela y tendrá en total 1 vela;
El segundo año utilizó 2 velas y tendrá en total 1+2=3 velas;
El tercer año utilizó 3 velas y tendrá en total 1+2+3=6 velas;
El cuarto año utilizó 4 velas y tendrá en total 1+2+3+4=10 velas;

El cumpleaños N utilizó N velas y tendrá en total $1+2+3+4+..+N=(N)(N+1)/2 = (N^2+N)/2$ velas

Sabemos que: $(N^2+N)/2 = 120$;
Esto implica que: $N^2 + N – 240 = 0$
Resolviendo la anterior ecuación cuadrática obtenemos que: N=15
Esto implica que Sofía tiene 15 años

46. ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener sumando dos números diferentes de los siguientes “1,2,3,4,5,6,7,8,9”?

Solución:

Primero utilizar el 1 para sumarlo con los demás números:

1+2=3
1+3=4
1+4=5
1+5=6
1+6=7
1+7=8
1+8=9
1+9=10

Ahora utilizar el 2 con el resto de los números:

La única suma que da un resultado que no se haya obtenido con el 1 es 2+9=11

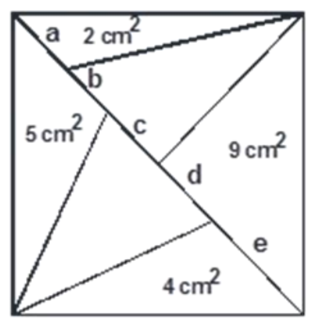
Con el 3 pasa lo mismo, la única suma cuyo resultado no se ha obtenido es 3+9=12

Continuando tenemos las siguientes sumas:

4+9=13
5+9=14
6+9=15
7+9=16
8+9=17

Entonces tenemos que existen 15 resultados diferentes

47. En un cuadrado con 30 cm^2 de área se dibujó una diagonal. Posteriormente, se dividió en 6 triángulos, como se muestra la figura, en donde también se han marcado las áreas de algunos de esos triángulos. ¿Cuál de los segmentos a, b, c, d y e de la diagonal es el más largo?



Solución.

Sabemos que la suma de las áreas de los 2 triángulos que se forman al trazar la diagonal es de 30cm^2 y como ambos triángulos son congruentes tienen un área de 15cm^2 cada uno.

Con lo anterior tenemos que las áreas que faltan de los triángulos son de 4cm^2 y 6cm^2.

Como todos tienen la misma altura (h), tendremos que:

(a)h/2 = 2; (b+c)h/2 = 4; (d+e)h/2 = 9; (a+b)h/2 = 5; (c+d)h/2 = 6; (e)h/2 = 4;

Resolviendo obtenemos que:

$a = 4/h$; $b = 6/h$; $c = 2/h$; $d = 10/h$; $e = 8/h$;

Lo anterior implica que el segmento mayor es d.

48. Dos polígonos regulares de lado 1 están pegados por un lado. Uno de los dos tiene 15 lados y el otro tiene *n* lados. Etiquetamos con A y B a los vértices del lado que comparten ambos polígonos, con C al otro vértice que es adyacente a B sobre el 15-ágono y con D al otro vértice que es adyacente a B en el otro polígono. Si la distancia entre C y D es 1, ¿cuál es el valor de *n*?

Solución.

Sea O el centro del 15-ágono y P el centro del n-ágono. El triángulo OAB es congruente a cualquier triángulo que se forme tomando como vértices a O y a los dos extremos de un lado del 15-ágono; como hay 15 triángulos de esos alrededor de O tenemos que el ángulo AOB mide $360^o/15 = 24^o$. Esos 15 triángulos son congruentes y así el ángulo ABC (dentro del 15-ágono) es igual a la suma de los ángulos ABO y BAO, que es igual a $180^o - 24^o = 156^o$. Por otro lado, el triángulo BCD es equilátero y entonces el ángulo ABD (dentro del n-ágono) mide $360^o - 60^o - 156^o = 144^o$. Como PAB + PBA = ABD, el ángulo APB mide $180^o - 144^o = 36^o$, así que debe haber $360/36 = 10$ triángulos congruentes a APB alrededor de P. Por lo anterior, tenemos que ***n*** = 10.

49. Juan le preguntó a sus cinco amigos que cuántos de ellos habían estudiado para el examen de Matemáticas. Octavio dijo que ninguno. Gabriela dijo que solamente uno. Pedro dijo que exactamente dos. Marcos dijo que exactamente tres y Claudia dijo que exactamente cuatro. Juan sabe que los que no estudiaron están diciendo mentiras, y que aquellos que estudiaron están diciendo la verdad. ¿Cuántos de los amigos de Juan estudiaron para el examen?

Solución:

Como todos los amigos de Juan dicen una cantidad diferente, a lo más uno de ellos puede estar diciendo la verdad; por tanto, a lo más uno de sus amigos estudió. Tenemos dos posibilidades:

∗ Si ninguno de sus amigos estudió, entonces Octavio dice la verdad, pero entonces tendríamos que Octavio estudió y, en consecuencia, sería falso que ninguno de sus amigos estudió. Luego, tenemos que esta opción no puede suceder.

∗ Si exactamente uno de sus amigos estudió, entonces Gabriela dice la verdad (y es la única que estudió).

50. Pablo eliminó un número de una lista de 10 números consecutivos. La suma de los que quedaron es 2018. ¿Cuál es el número que eliminó?

Solución:

Al sumar 10 números consecutivos distintos, cada uno termina en un dígito distinto, así que la suma de todos termina en lo que termina 0 + 1 + 2 + · · · + 9 = 45, o sea, en 5.

Como la suma dio 2018, entonces el número que se eliminó termina en 7 (es el único que al ser eliminado da la terminación en 8.

La única posibilidad es 227; y los números son: 220, 221, · · ·,226, 228 , 229.

51. Encuentra (sin usar calculadora y sin aproximar con decimales) el valor numérico exacto de la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\sqrt{4+\frac{3}{2}\sqrt{7}}+\sqrt{4-\frac{3}{2}\sqrt{7}}}$$

Solución:
Primero se transforma la expresión a una equivalente:

$$\sqrt{4+\frac{3}{2}\sqrt{7}}+\sqrt{4-\frac{3}{2}\sqrt{7}}=\sqrt{\left(\sqrt{4+\frac{3}{2}\sqrt{7}}+\sqrt{4-\frac{3}{2}\sqrt{7}}\right)^2}$$

Y como:

$$\left(\sqrt{4+\frac{3}{2}\sqrt{7}}+\sqrt{4-\frac{3}{2}\sqrt{7}}\right)^2=\left(\sqrt{4+\frac{3}{2}\sqrt{7}}\right)^2+2\left(\sqrt{4+\frac{3}{2}\sqrt{7}}\right)\left(\sqrt{4-\frac{3}{2}\sqrt{7}}\right)+\left(\sqrt{4-\frac{3}{2}\sqrt{7}}\right)^2$$

$$=\left(4+\frac{3}{2}\sqrt{7}\right)+2\left(\sqrt{\left(4+\frac{3}{2}\sqrt{7}\right)\left(4-\frac{3}{2}\sqrt{7}\right)}\right)+\left(4-\frac{3}{2}\sqrt{7}\right)$$

$$=\left(4+\frac{3}{2}\sqrt{7}\right)+2\left(\sqrt{16-\frac{63}{4}}\right)+\left(4-\frac{3}{2}\sqrt{7}\right)$$

$$=8+2\left(\sqrt{\frac{64}{4}-\frac{63}{4}}\right)=8+2\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)=8+1=9$$

Entonces:

$$\sqrt{4+\frac{3}{2}\sqrt{7}}+\sqrt{4-\frac{3}{2}\sqrt{7}}=3$$

52. **El factorial de un número, es el resultado de multiplicar todos los enteros positivos menores al número. Por ejemplo, el factorial de 4 es 1x2x3x4=24. El factorial se escribe de forma compacta como 4! = 1x2x3x4=24, con un signo de admiración a la derecha. Considera un número n que cumpla: (2!)x(3!)x(4!)n=8! Encuentra el residuo que se obtiene al dividir n entre 8.**

Solución:

$$\frac{n}{8} = \frac{8!}{2!\,3!\,4!\,8} = \frac{8x7x6x5x4x3x2x1}{(2x1)(3x2x1)(4x3x2x1)8} = \frac{7x5}{2} = \frac{35}{2}$$

Con lo anterior concluimos que el residuo que se obtiene al dividir n entre 8 es 1.

53. **El promedio de las edades de la abuela, el abuelo y sus 7 nietos es de 28 años. El promedio de edades de los 7 nietos únicamente es de 15 años. Sabiendo que el abuelo es 3 años mayor que la abuela, ¿Cuántos años tiene el abuelo?**

Solución:

Que el promedio de las edades de la abuela, el abuelo y sus 7 nietos sea de 28 años implica que la suma de las edades de todos es: 28 X 9 = 252.

Que el promedio de edades de los 7 nietos únicamente sea de 15 años implica que la suma de las edades de los nietos es: 15 X 7 = 105.

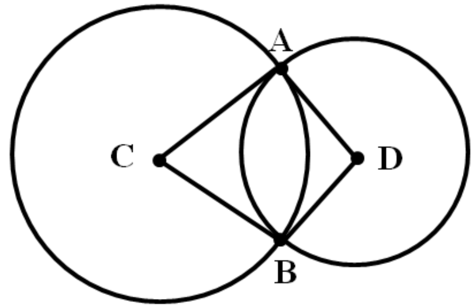
⇒ la suma de la edad del abuelo y de la abuela es: 252 – 105 = 147.

Como la edad del abuelo es 3 años mayor que la abuela tenemos que:
edad_abuela + 3 = edad_abuelo
⇒ edad_abuela = edad_abuelo – 3
⇒ edad_abuela + edad_abuelo = 2*edad_abuelo - 3 = 147
⇒ edad_abuelo = 75 años

54. **Pedro el minero mando analizar un lingote de oro de 5kg de peso y le informaron que tenía una pureza del 80%. Lo junto con otro lingote de 1kg y mando analizar la muestra completa, resultando con una pureza del 70%. ¿Cuál es la pureza del segundo lingote de 1 kg?**

Solución:
Cantidad de oro en el primer lingote: 5kg(0.8) = 4kg
Cantidad de oro en la muestra completa: 6kg(0.7) = 4.2kg
Cantidad de oro en el segundo lingote de 1kg: 4.2kg – 4kg = 0.2kg
Pureza del segundo lingote de 1kg: 20%

55. **Los círculos de la figura tienen sus centros en C y D y se intersectan en A y B . Si ∠ACB = 60°, y ∠ADB = 90° y DA mide 1, ¿Cuánto mide CA?**



Solución:

Como el ángulo ∠ADB mide 90° ⇒ ΔADB es un triángulo rectángulo

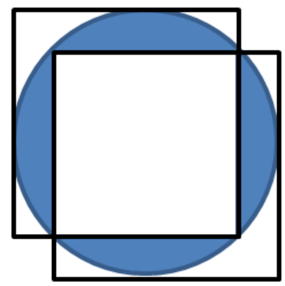
Tenemos que AD y BD son radios ⇒AD = BD = 1 ⇒ AB = $\sqrt{2}$ (Teorema de Pitágoras)

Como el ángulo ∠ACB mide 60° ⇒ ΔACB es un triángulo equilátero.

⇒ CA = AB

⇒ CA = $\sqrt{2}$

56. **Dos cuadrados del mismo tamaño cubren a un círculo de radio 3 cm, como se muestra en la figura (considere que π=3.14). ¿Cuánto vale el área sombreada?**



Solución:

El área de todo el círculo es $\pi r^2 = 9\pi$ cm.

Si cada lado del cuadradito blanco dentro del círculo mide l, tenemos que (por Teorema de Pitágoras) $l^2 + l^2 = 6^2 = 36\text{cm}^2$, de donde obtenemos el área del cuadradito: $l^2 = 36/2 = 18\text{ cm}^2$.

El área buscada es $(9\pi – 18)\text{ cm}^2$.

57. **¿Cuál es la suma de todos los enteros positivos n que dejan 15 como residuo al dividir 141 entre n?**

Solución:

Sabemos que n debe ser un divisor de 141 − 15 = 126 que sea mayor a 15.

Las posibilidades para n son 18, 21, 42, 63 y 126.

La suma de todos es 270.

58. **¿Cuántas cifras son necesarias para escribir todos los números del 1 al 2019?**

Solución:

Del 1 al 9 se necesitan 9, del 10 al 99 se necesitan 90 × 2 = 180, del 100 al 999 se necesitan 900 × 3 = 2700, y del 1000 al 2019 se necesitan 1020 × 4 = 4020, entonces en total son:

9 + 180 + 2700 + 4080 = 6969.

59 ¿Cuál es la suma de los dígitos de: $21\times(1+10+10^2+10^3+\ldots+10^{2019})$?

Solución:

21x(11111…) son 2020 unos dentro del paréntesis (es decir 2020 veces el número uno dentro del paréntesis).
(20+1)x(111…) = 20x(1111…)+1x(1111…) = 2222…20+(1111…)=2333…31

⇒ la suma es igual a: 2+3+3+…+3+1 = 2 + 3x2019 + 1 = 6060

60 Tengo tres recipientes de un litro cada uno. El primero contiene 60% de jugo de naranja y 40% de agua. El segundo tiene 80% de jugo de naranja y 20% de jugo de limón. El tercero está vacío y quiero llenarlo (usando el líquido de los otros dos recipientes) de tal manera que me quede el doble de cantidad de jugo de naranja que de agua. ¿Qué porcentaje de jugo de limón le quedará al tercer recipiente?

Solución:

Supongamos que tomamos Z litros del primer recipiente.

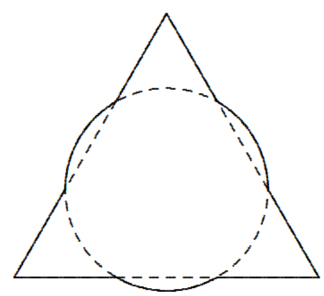
Entonces estamos tomando 1 − Z litros del segundo y la cantidad de jugo de naranja que queda en el tercer recipiente es .6Z + .8(1 −Z) litros.

Esto debe ser el doble de la cantidad de agua así que tenemos la ecuación:

6Z + .8(1 − Z) = 2(.4Z), de donde 6Z + 8 – 8Z = 8Z y de aquí que Z = .8.

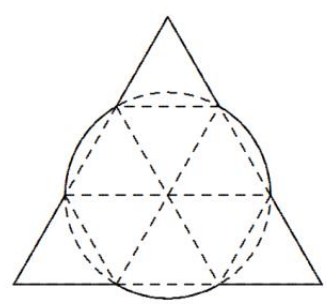
La cantidad de limón es (1 − .8)(.2) = .04 = 4%.

61 En la figura se muestra un triángulo equilátero de lado 3 cm y sobrepuesto hay un círculo de radio 1 cm de tal manera que el centro del círculo coincide con el centro del triángulo. ¿Cuál es el perímetro de la figura formada por el contorno (marcada con línea continua en la figura)?



Solución:

Partamos el triángulo, en triángulos equiláteros de lado 1 como indica la figura. Entonces todos los ángulos miden 60°



Las líneas rectas del triángulo suman 6cm,

y solo faltaría sumar el perímetro de las partes continuas de la circunferencia, que si las junto formaría la mitad de la circunferencia.

El perímetro de una circunferencia es 2πr pero como solo es la mitad, sería $\frac{2\pi r}{2} = \pi r$

Pero r = 1

De aquí que el perímetro de toda la parte continua es 6cm + π .

62 Las fracciones 1/3 y 1/5 están señaladas en la recta numérica y el segmento que las une se ha dividido en 16 partes iguales. ¿En qué posición se encuentra 1/4 ?

Solución:

Planteamos la siguiente ecuación, donde x es el número de segmentos que debemos movernos a partir de la posición de 1/5 para llegar a 1/4 :

$$\frac{1}{5} + \frac{x}{16}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{4}$$

Multiplicamos por 16 · 5 para obtener

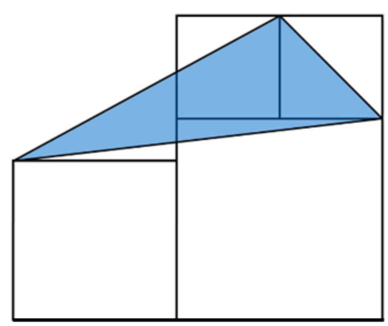
$$16 + 5x\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 20$$

de donde

$$x\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}$$

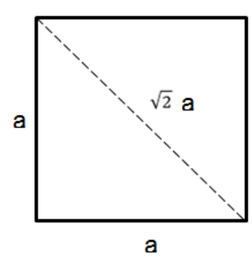
Ahora multiplicamos por 15 y obtenemos (5 − 3)x = 12, y entonces x = 6.

63 Se tienen conectados cuatro cuadrados como se muestra en la figura. La medida del lado de los cuadrados más pequeños es 1 y sobre los cuadrados se ha dibujado un triángulo. ¿Cuál es el área del triángulo?

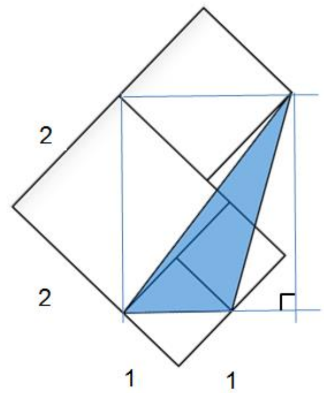


Solución:

Sabemos que la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado *a* es : $(\sqrt{2})a$



Girando la figura original para identificar la base y la altura del triángulo como se ve abajo.



Tenemos que:

$$Base = 1\sqrt{2}$$

$$Altura = 2\sqrt{2}$$

Finalmente obtenemos el área buscada:

$$A = \frac{(1\sqrt{2})(2\sqrt{2})}{2} = 2$$

Material elaborado por:

Silverio Camarena Garay.- Responsable del Taller de Matemáticas del Centro de Ciencias de Sinaloa.

Luis Guillermo Higuera Pérez.- Auxiliar del Taller de Matemáticas del Centro de Ciencias de Sinaloa.

Jorge Adalberto Navarro Castillo.- Coordinación de Fomento Educativo del Centro de Ciencias de Sinaloa.

Salvador Hernández Vaca.- Coordinación de Fomento Educativo del Centro de Ciencias de Sinaloa.